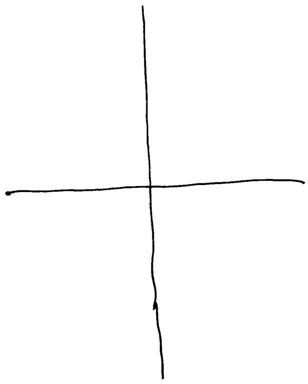
○ 1サイクル間に減~~衰~~衰力のなす仕事.

減衰自由振動.



$$\ddot{x}+2h\omega\dot{x}+\omega^2 x=0.$$

$$\therefore\ x(t)=e^{-h\omega t}\left(c_1\cos\omega\sqrt{1-h^2}\,t+c_2\sin\omega\sqrt{1-h^2}\,t\right)$$

$x(0)=a,\ \dot{x}(0)=0$ とすると

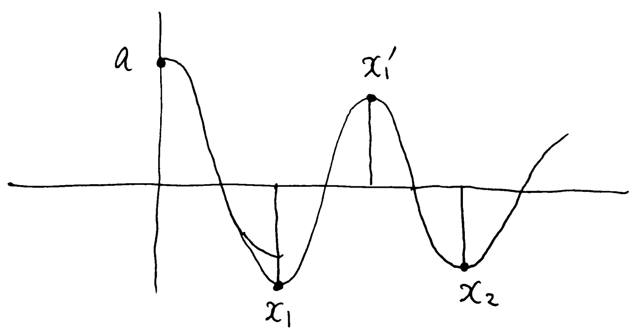
$$x(0)=c_1=a.$$

$$\dot{x}(t)=-h\omega e^{-h\omega t}\cdot\left(c_1\cos\omega\sqrt{1-h^2}\,t+c_2\sin\omega\sqrt{1-h^2}\,t\right)$$
$$+e^{-h\omega t}\cdot\left(\omega\sqrt{1-h^2}(-c_1)\sin\omega\sqrt{1-h^2}\,t+\omega\sqrt{1-h^2}\,c_2\cos\omega\sqrt{1-h^2}\,t\right)$$

$$\dot{x}(0)=-h\omega\cdot c_1+\omega\sqrt{1-h^2}\,c_2=0.$$

$$\therefore\ c_2=\frac{h\omega}{\omega\sqrt{1-h^2}}\cdot c_1=\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\cdot a$$

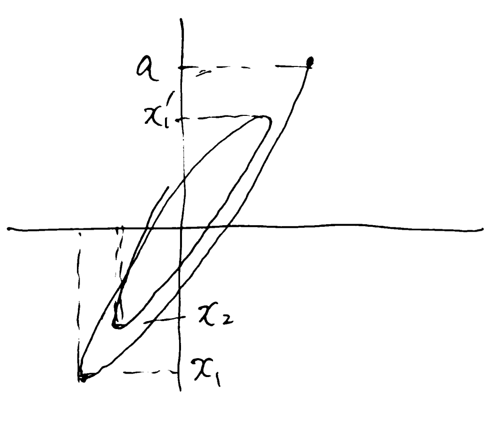
$$\therefore\ x(t)=a\cdot e^{-h\omega t}\left(\cos\omega\sqrt{1-h^2}\,t+\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\sin\omega\sqrt{1-h^2}\,t\right)$$



1サイクル間に減衰力のなすエネルギー ΔW

$$\Delta W=\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2$$

$W=\frac{1}{2}kx_1'^2$ とすると.



$$\frac{\Delta W}{W}=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1'^2}=\left(\frac{x_1}{x_1'}\right)^2-\left(\frac{x_2}{x_1'}\right)^2$$

ここで x_1 と x_1' の時刻差は $\frac{T}{2}$ なので.

$$\left(\frac{x_1}{x_1'}\right)^2=\left(\frac{e^{-h\omega(t)}}{e^{-h\omega(t+\frac{T}{2})}}\right)^2=\left(\frac{e^{-h\omega t}}{e^{-h\omega t}\cdot e^{-h\omega\frac{T}{2}}}\right)^2$$
$$=\left(\frac{1}{e^{-h\omega\frac{T}{2}}}\right)^2=e^{+h\omega T}=e^{2\pi h}$$

$T=\frac{2\pi}{\omega}$ より

$$\left(\frac{x_2}{x_1'}\right)^2=\left(\frac{e^{-h\omega(t+T)}}{e^{-h\omega(t+\frac{T}{2})}}\right)^2=\left(\frac{e^{-h\omega t}\cdot e^{-h\omega T}}{e^{-h\omega t}\cdot e^{-h\omega\frac{T}{2}}}\right)^2$$
$$=\left(\frac{e^{-h\omega T}}{e^{-h\omega\frac{T}{2}}}\right)^2=\left(e^{-h\omega\frac{T}{2}}\right)^2=e^{-h\omega T}=e^{-2\pi h}$$

マクローリン展開

$$\therefore\ \frac{\Delta W}{W}=e^{2\pi h}-e^{-2\pi h}=1+2\pi h+\frac{(2\pi h)^2}{2!}+\frac{(2\pi h)^3}{3!}+\cdots$$
$$-\left(1+(-2\pi h)+\frac{(-2\pi h)^2}{2!}+\cdots\right)$$
$$=4\pi h.$$

$$\therefore\ h=\frac{1}{4\pi}\frac{\Delta W}{W}$$

参考文献

最新耐震構造解析